הסתברות

הגדרה

(Ω, S) מרחב מדיד ו$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קבוצות מדידות(בS). נגדיר:

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{k=1}^{n}\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right)$$

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{k=1}^{n}\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right)$$

במילים: הsup$\lim$ הוא קבוצת כל התוצאות שנמצאות ב∞ A_nים, והinf$\lim$ הוא קבוצת התוצאות הנמצאות בכל הA_nים פרט למספר סופי.

דוגמה

$\Omega = \mathbb{R}$, $S = \mathscr{B}(\mathbb{R})$. נגדיר סדרת מאורעות

$$A_n = \begin{cases} \left[0, \frac{1}{n}\right] & n \text{ is odd} \\ \left[1 - \frac{1}{n}, 1\right] & n \text{ is even} \end{cases}$$

קל לראות כי $\overline{\lim} A_n = \{0, 1\}$ ו$\underline{\lim} A_n = \emptyset$(מופיע בלי דילוגים)

הערה

תמיד $\underline{\lim} A_n \subseteq \overline{\lim} A_n$.

למה(בורל קנטלי)

יהי (Ω, S, P) מרחב הסתברות ו$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קבוצות בS. אזי:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \implies P\left(\overline{\lim} A_n\right) = 0$$

במילים: אם המאורעות A_n כ"כ נדירים עד שסכום ההסתברויות שלהם מתכנס, אזי הסיכוי להמצא ב∞ A_nים הוא 0.

הוכחה

לכל n נגדיר $Z_n := \sum_{i=1}^{n} I_{A_i} \geq 0$ - זוהי פונקציה פשוטה. אזי $Z = \lim_{n\to\infty} Z_n = \sum_{i=1}^{\infty} I_{A_i}$. ע"פ משפט ההתכנסות המונוטונית:

$$(\mathbb{E}[Z] =) \int_\Omega Z \,\mathrm{d}P = \int_\Omega \left(\lim_{n\to\infty} Z_n\right) \mathrm{d}P = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega Z_n \,\mathrm{d}P = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) < \infty$$

$\int_\Omega Z \,\mathrm{d}p < \infty$, ולכן ע"פ ההרצאה $Z < \infty$ כמעט בכל מקום.
$P(\{z = \infty\}) = 0$. נשים לב כי $\{z = \infty\} = \overline{\lim} A_n$.

הסבר: אם $\omega \in \overline{\lim} A_n$ אזי ω נמצא ב∞ A_nים, ואז ∞ אינדיקטורים I_{A_i} יתנו 1 והטור $Z = \sum_{i=1}^{\infty} I_{A_i}$ ייתבדר.

ולהפך: אם $Z = \infty$ אזי ∞ אינדיקטורים I_{A_i} הם 1, וω נמצא ב∞ A_iים.

כלומר: $P\left(\overline{\lim} A_n\right) = 0$.

טענה

יהיו $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה של משתנים מקריים במרחב הסתברות (Ω, S, P).
אם $\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > \varepsilon) < \infty$ לכל $\varepsilon > 0$ אזי $P\left(\lim_{n\to\infty} X_n = 0\right) = 1$. כלומר יש התכנסות כב"מ("almost surely" - מתכנס כמעט בוודאות).

הוכחה

נקבע $\varepsilon > 0$, ונגדיר $A_n = \{\omega | |X_n(\omega)| \varepsilon > 0\} = \{|X_n| > \varepsilon\}$.
למת בורל קנטלי אומרת כי $P\left(\overline{\lim} A_n\right) = 0$. נשים לב ש

$$\left(\overline{\lim} A_n\right)^{\complement} = \{\omega | \exists_{N_\omega \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq N_\omega} \omega \notin A_n\} = \{\omega | \exists_{N_\omega} \forall_{n \geq N_\omega} |X_n(\omega)| \leq \varepsilon\} =: B_\varepsilon$$

(נשים לב שלכל $\varepsilon > 0$ $B_\varepsilon^{\complement} = \overline{\lim} A_n$ ולכן $P\left(B_\varepsilon^{\complement}\right) = 0$)

נגדיר $B := \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{\frac{1}{n}}$. זוהי בדיוק הקבוצה שבה יש התכנסות לאפס.
כעת:

$$P\left(B^{\complement}\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_{\frac{1}{n}}^{\complement}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P\left(B_{\frac{1}{n}}^{\complement}\right) = 0$$

$\Longleftarrow P(B) = 1$ וסיימנו.

משפט(אי שוויון מרקוב)

תהי $f:\Omega\to[0,\infty]$ פונקציה מדידה ואי שלילית על הממ"ח (Ω,S,μ).
אזי לכל $0<t<\infty$ $\mu\left(\{f\geq t\}\right)\leq\frac{1}{t}\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu$.
(אם $X:\Omega\to[0,\infty]$ משתנה מקרי, אזי לכל $0<t<\infty$ $P\left(X\geq t\right)\leq\frac{1}{t}\int_\Omega X\,\mathrm{d}P=\frac{1}{t}\mathbb{E}\left[X\right]$)

הוכחה

בגלל שf אי שלילית,

$$\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu\geq\int_{\{f\geq t\}}f\,\mathrm{d}\mu\geq\int_{\{f\geq t\}}t\,\mathrm{d}\mu=t\cdot\int_{\{f\geq t\}}\mathrm{d}\mu=t\cdot\mu\left\{f\geq t\right\}$$

הגדרה

יהיו (Ω,S,P) מרחב הסתברות.
המאורעות $A,B\in S$ יקראו <u>בלתי תלויים</u> אם

$$P\left(A\cap B\right)=P\left(A\right)\cdot P\left(B\right)\iff P\left(A\right)=\frac{P\left(A\cap B\right)}{P\left(B\right)}=P\left(A|B\right)\iff\begin{array}{l}P\left(B\right)=P\left(B|A\right)\\P\left(A|B\right)=P\left(A\right)\end{array}$$

דוגמה(למרחב הסתברות)

מטבע הוגן (Ω,S,P) כאשר $\Omega=\{H,T\}$=קבוצת התוצאות=מרחב מדגם.

$$S=\{\emptyset,\{H\},\{T\},\{H,T\}\}=\mathcal{P}\left(\Omega\right)$$

$P:S\to[0,1]$ מוגדרת ע"י

$$\left.\begin{array}{rcl}P\left(\emptyset\right)&=&0\\P\left(\{H\}\right)=P\left(\{T\}\right)&=&\frac{1}{2}\\P\left(\{H,T\}\right)&=&1\end{array}\right\}\implies P\left(A\right)=\frac{|A|}{2}$$

קל לראות כי P היא מידה על S ומקיימת $P\left(\Omega\right)=1$, ולכן <u>הסתברות</u>. למשל:

$$1=P\left(\{H\}\uplus\{T\}\right)=P\left(\{H\}\right)+P\left(\{T\}\right)$$

נגדיר מ"מ $X:\Omega\to\mathbb{R}$ ע"י $\begin{array}{l}H\mapsto1\\T\mapsto0\end{array}$. בעצם $X\left(\omega\right)=1\cdot I_{\{H\}}\left(\omega\right)+0\cdot I_{\{T\}}\left(\omega\right)$ פונקציה פשוטה!
נחשב תוחלת:

$$\mathbb{E}\left[X\right]=\int_\Omega X\,\mathrm{d}P=1\cdot P\left(\{H\}\right)+0=\frac{1}{2}$$

שונות

$$\mathrm{Var}\left[X\right]=\int_{\Omega}\left(X-\mathbb{E}\left[X\right]\right)^{2}\,\mathrm{d}P=\int_{\Omega}\left(X-\frac{1}{2}\right)^{2}\,\mathrm{d}P=\int_{\Omega}\left(\frac{1}{2}\cdot I_{\{H\}}-\frac{1}{2}I_{\{T\}}\right)^{2}\,\mathrm{d}P=$$

$$=\int_{\Omega}\left(\frac{1}{4}\cancel{I_{\{H\}}^{2}}-\cancel{\frac{1}{2}I_{\{H\}}\cdot I_{\{T\}}}+\frac{1}{4}\cdot\cancel{I_{\{T\}}^{2}}\right)\,\mathrm{d}P=\frac{1}{4}\cdot P\left(\{H\}\right)+\frac{1}{4}\cdot P\left(\{T\}\right)=\frac{1}{4}$$

($I_{\{H\}}^{2}=I_{\{H\}}$ כי $I_{\{\}}\in\{0,1\}$, ו$I_{\{H\}}\cdot I_{\{T\}}=0$ כי הם מאורעות זרים)

התפלגות מצטברת

$$F_{X}\left(x\right):=P\left(X\leq x\right)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{1}{2} & 0\leq x<1\\ 1 & x\geq 1\end{cases}$$